COLÉGIO NOMELINI CIRANDINHA

Sistemas de equações do 1° grau a duas variáveis

Prof. Neto ☺

ESTUDE A PARTE TEÓRICA E RESOLVA OS EXERCÍCIOS DO FINAL DA FOLHA NO CADERNO.

Introdução

Alguns problemas de matemática são resolvidos a partir de soluções comuns a duas equações do 1º a duas variáveis.

Nesse caso, diz-se que as equações formam um **sistema de equações do 1° grau a duas variáveis**, que indicamos escrevendo as equações abrigadas por uma chave. Veja os exemplos:

a) $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-y=10 \\ x+y=18 \end{cases}$

O par ordenado que verifica ao mesmo tempo as duas equações é chamado **solução do sistema**. Indicamos pela letra S, de solução.

Por exemplo, o par (7,3) é solução do sistema $\begin{cases} x+y=10 \\ x-3y=-2 \end{cases}$

Pois verifica as duas equações. Ou melhor: $\begin{cases} 7+3=10 \\ 7-3.(3)=-2 \end{cases}$

Resolução de sistemas de equações do 1° grau (2 x 2)

Os processos ou métodos mais comuns são: o método da substituição, método da adição, método da comparação, além do método gráfico.

Método da substituição

Para aprender a trabalhar com esse método, você deve acompanhar os passos indicados nos exemplos a seguir:

1º exemplo: Resolver o sistema $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=1 \end{cases}$

1° passo: Isola-se uma das variáveis em uma das equações. Vamos isolar x na 1ª equação:

$$x+y=7 \Rightarrow \boxed{x=7-y}$$

2° passo: Substitui-se a expressão encontrada no passo 1 na outra equação. Obtemos então uma equação do 1º com apenas uma incógnita

$$\begin{aligned} &x-y=1 \\ &(7-y)-y=1 \\ &7-y-y=1 \\ &7-2y=1 \end{aligned}$$

3° passo: Resolvemos a equação obtida no 2º passo:

$$
\begin{aligned}
&7-2y=1\\
&-2y=1-7\\
&-2y=-6\\
&y=\frac{-6}{-2}\\
&\boxed{y=3}
\end{aligned}
$$

obtendo, assim, o valor de y.

4º passo: (Para encontrarmos o valor de x) Substitui-se o valor encontrado no 3º passo em qualquer uma das equação iniciais.

$$
\begin{aligned}
&x+y=7\\
&x+(3)=7\\
&x=7-3\\
&\boxed{x=4}
\end{aligned}
$$

5º passo: Por último, escrevemos a solução do sistema: S = {(4,3)}.

2º exemplo: Resolva o sistema $\begin{cases} x=2y \\ 2x-5y=3 \end{cases}$

$Passo 1: x=2y$

$Passo 2:$

$2x-5y=3 \Rightarrow 2(2y)-5y=3 \Rightarrow 4y-5y=3 \Rightarrow -1y=3$

$Passo 3: -y=3 \Rightarrow \boxed{y=-3}$

$$
\begin{aligned}
Passo\ 4:\ &x=2y\\
&x=2.(-3)\\
&\boxed{x=-6}
\end{aligned}
$$

A solução do sistema é: $S=\{(-6,-3)\}$

Método da Adição

Adicionando ou subtraindo membro a membro duas igualdades, obtemos uma nova igualdade.

O método consiste em somar as duas equações, mas isso deve ser feito sempre de modo a eliminar uma das variáveis na nova equação obtida. Ou seja, é preciso chegar a uma só equação, com uma só incógnita. Para que isso ocorra, é necessário existam termos opostos nas duas equações (em relação a uma mesma letra...).

Exemplo 1: Considere o sistema $\begin{cases} 5x-3y=15 \\ 2x+3y=6 \end{cases}$

Observe que a equação $\boxed{1}$ tem o termo -3y, e a equação $\boxed{2}$ tem o termo +3y (oposto de -3y).

Esse fato nos permite obter uma só equação sem a incógnita y, somando as duas equações membro a membro.

$$\begin{cases} 5x - 3y = 15 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases} \oplus \qquad \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} Como -3y + 3y = 0, o\ y\ desaparece. \\ Aí,\ fica\ tudo\ mais\ fácil! \end{array}}$$

$$7x + 0 \quad = 21$$

$$7x = 21$$

$$\boxed{x = 3}$$

Agora, é só substituir o valor de x em uma das equações do sistema:

$$5x - 3y = 15$$

$$5.(3) - 3y = 15$$

$$15 - 3y = 15$$

$$-3y = 15 - 15$$

$$-3y = 0$$

$$\boxed{y = 0}$$

A única solução do sistema é o par (3,0)

Exemplo 2: Vamos resolver o sistema $\begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$

Aqui, seria **inútil** somar imediatamente as equações. Como não observamos **termos opostos** (que somados resulta 0), nenhuma letra desaparece. Mas, podemos obter termos opostos.

Veja que o MMC entre 5 e 2 (coeficientes de x nas duas equações) é 10. Daí, multiplicamos a 1ª equação por 2 e a 2ª equação por -5:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 16 & \cdot(2) \\ 3x + 2y = 2 & \cdot(-5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 10y = 32 \\ -15x - 10y = -10 \end{cases}$$

Você viu bem?!!! Com isso, conseguimos termos opostos neste último sistema.

E como +10y –10y = 0, vem:

$$\begin{cases} 4x + 10y = 32 \\ -15x - 10y = -10 \end{cases} \oplus$$

$$-11x + 0 \quad = 22$$

$$-11x = 22$$

$$x = \frac{22}{-11}$$

$$\boxed{x = -2}$$

Agora, levamos x = -2 na 2ª equação para encontrar o valor de y:

$3x+2y=2$

$3(-2)+2y=2$

$-6+2y=2$

$2y=2+6$

$2y=8$

$\boxed{y=4}$

A solução é o par (-2,4).

Exemplo 3: Resolva pelo método da adição o sistema $\begin{cases}3x+y=3\\3x+4y=30\end{cases}$

Vamos tornar opostos (ou simétricos) os coeficientes em x. Para isso, basta multiplicar a primeira equação por -1 (não mexer na 2ª):

$$\begin{cases}3x+y=3 & .(-1)\\3x+4y=30 & .(1)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-3x-y=-3\\3x+4y=30\end{cases} \oplus$$
$$3y=27$$

De 3y = 27, tiramos $\boxed{y = 9}$.

Calculando x:

Substituímos y = 9 na 1ª equação:

$3x+y=3$

$3x+(9)=3$

$3x=3-9$

$3x=-6$

$x=\dfrac{-6}{3}$

$\boxed{x=-2}$

Nota importante: Podemos aplicar o método da adição de outra forma, neste caso procurando zerar a incógnita y. Veja:

Multiplicamos a 1ª equação por 4 e a 2ª por 1... e então

$$\begin{cases}3x+y=3 & .(-4)\\3x+4y=30 & .(1)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-12x-4y=-12\\\quad 3x+4y=\ \ 30\end{cases} \oplus$$
$$-9x+0\ =\ 18$$

De $-9x=18$, encontramos $x=\dfrac{18}{-9}=-2$ (Viu?!! Dá o mesmo resultado!). Portanto, pode-se usar o processo da dição duas vezes seguidas

Exemplo 4: Resolver o sistema pelo processo da adição $\begin{cases}6a-5b=15\\-7a+16b=13\end{cases}$

Temos que o MMC(6,7) = 42. Então, multiplicamos a 1ª equação por 7 e a 2ª por 6, temos:

$$\begin{cases} 6a - 5b = 15 & .(7) \\ -7a + 16b = 13 & .(6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 42a - 35b = 105 \\ -42a + 96b = 78 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 42a - 35b = 105 \\ -42a + 96b = 78 \end{cases} \oplus$$

$$61b = 183$$

$$b = \frac{183}{61} = 3$$

Substituindo b = 3 na 2ª equação, vem:

$$-7a + 16b = 13$$
$$-7a + 16.(3) = 13$$
$$-7a + 48 = 13$$
$$-7a = 13 - 48$$
$$-7a = -35$$
$$a = \frac{-35}{-7}$$
$$\boxed{a = 5}$$

Exercícios – RESOLVA NO CADERNO

1) Aplicando o método da substituição, resolva os seguintes sistemas 2x2:

$a)\begin{cases} x - y = 5 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$ $b)\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$ $c)\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

2) Aplicando o método da substituição, resolva os seguintes sistemas:

$a)\begin{cases} x - y = 1 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$ $b)\begin{cases} x = 3y \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ $c)\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x + y = -1 \end{cases}$

3) Aplicando o método da ADIÇÃO, resolva os seguintes sistemas:

$a)\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$ $b)\begin{cases} x = 3y \\ x + 2y = 10 \end{cases}$ $c)\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$ $d)\begin{cases} x = 2y \\ 3x + 5y = 55 \end{cases}$

$e)\begin{cases} 4x + y = 7 \\ 2x - 5y = 9 \end{cases}$ $f)\begin{cases} x + y = 8 \\ 4x - 6y = 12 \end{cases}$ $g)\begin{cases} x - 3y = 9 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$ $h)\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$

$i)\begin{cases} 5x + 4y = 1 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$ $j)\begin{cases} x - y = 1 \\ x - 3y = -3 \end{cases}$

4) Aplicando o método mais conveniente para o caso, resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - y = 8 \\ x + y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 3y = 5 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = 6y \\ 2x - 7y = -10 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 4x - 9y = -1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 4x + y = 5 \end{cases}$